16　組合せ

142

(1)

（ア）

異なる n 個のものから重複を許して r 個とる組合せの数は ${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$

「同じ種類の 6 冊のノートを 3 人に配る」は，

「3 人から重複を許してのべ 6 人を選び，それぞれにノートを 1 冊ずつ配る」と同じ。

つまり，3 人を A,B,C とすると，のべで A が 3 人，B が 2 人，C が 1 人選ばれたとき，

配られたノートは A が 3 冊，B が 2 冊，C が 1 冊ということ。

よって，${}_3\mathrm{H}_6 = {}_8\mathrm{C}_6 = 28$ 通り

または，

同じ種類の 6 冊のノートを同じ 6 つの○で表し，3 人を A,B,C とし，それぞれのノートの

取り分を 2 つの仕切り｜を用いて，A の取り分｜B の取り分｜C の取り分　とすると，

たとえば ○｜○ ○ ○ ○ ○｜ の場合，A が 1 冊，B が 5 冊，C が 0 冊となる。

これは 6 つの○と 2 つの｜の順列または 8 ヶ所の 2 ヶ所に｜を入れる組合せと同じ。

よって，$\dfrac{8!}{2!6!} = 28$ 通りまたは ${}_8\mathrm{C}_2 = 28$ 通り

（イ）

あらかじめ 3 人にノートを 1 冊ずつ配っておき，残りの 3 冊のノートを 3 人に配るとし

てよいから，${}_3\mathrm{H}_3 = {}_5\mathrm{C}_3 = 10$ 通り。

または，

3 つの○と 2 つの｜の順列または 5 ヶ所の 2 ヶ所に｜を入れる組合せと同じ。

よって，$\dfrac{5!}{2!3!} = 10$ 通りまたは ${}_5\mathrm{C}_2 = 10$ 通り

(2)

（ア）

各ミニチュアカーが 3 人のうちの 1 人を選ぶと考えて，$3^6 = 729$ 通り

（イ）

2 人だけへの配り方は ${}_3\mathrm{C}_2\left(2^6 - 2\right) = 3\cdot 62$ 通り

1 人だけへの配り方は 3 通り

よって，$729 - \left(3\cdot 62 + 3\right) = 540$ 通り

143

(1)

ア

$_{9}C_{2}\cdot{}_{7}C_{3}\cdot{}_{4}C_{4}=1269$ 通り

イ

解法 1：余事象から求める

教員が同じ部屋に入る場合

2 人部屋に入ったとき

$_{7}C_{3}\cdot{}_{4}C_{4}=35$ 通り

3 人部屋に入ったとき

$_{7}C_{2}\cdot{}_{5}C_{1}\cdot{}_{4}C_{4}=105$ 通り

4 人部屋に入ったとき

$_{7}C_{2}\cdot{}_{5}C_{3}\cdot{}_{2}C_{2}=210$ 通り

よって，教員が異なる部屋に入るようにする割り当て方は

$1260-(35+105+210)=910$ 通り

解法 2：直接求める

教員が 2 人部屋と 3 人部屋に入る場合

$2\cdot{}_{7}C_{1}\cdot{}_{6}C_{2}\cdot{}_{4}C_{4}=210$

補足

教員の入り方は 2 通りある。

教員が 3 人部屋と 4 人部屋に入る場合

$2\cdot{}_{7}C_{2}\cdot{}_{5}C_{2}\cdot{}_{3}C_{3}=420$

教員が 2 人部屋と 4 人部屋に入る場合

$2\cdot{}_{7}C_{1}\cdot{}_{6}C_{3}\cdot{}_{3}C_{3}=280$

よって，$210+420+280=910$ 通り

(2)

解法 1

教員が同じ部屋に入る場合

7 人の生徒の入り方はイの解法 1 より，$35+105+210=350$ 通り

教員が異なる部屋に入る場合

910＝教員の 2 部屋への入り方×7 人の生徒の入り方

＝2×7 人の生徒の入り方

より，7 人の生徒の入り方は $\dfrac{910}{2}=455$ 通り

よって，$350+455=805$ 通り

解法 2：直接求める

4人部屋	3人部屋	2人部屋	割り当て方の数
4	3	0	${}_7C_4$
4	2	1	${}_7C_4 \cdot {}_3C_2$
4	1	2	${}_7C_4 \cdot {}_3C_1$
3	3	1	${}_7C_3 \cdot {}_4C_3$
3	2	2	${}_7C_3 \cdot {}_4C_2$
2	3	2	${}_7C_2 \cdot {}_5C_3$

よって，

$$\begin{aligned}{}_7C_4(1+{}_3C_1+{}_3C_2)+{}_7C_3({}_4C_3+{}_4C_2)+{}_7C_2\cdot{}_5C_3&=35\cdot7+35\cdot10+21\cdot10\\&=805\end{aligned}$$

144

(1)

ア

E, E, E, L, L, C, N, T, X の順列だから，並べ方の総数は $\dfrac{9!}{3!2!}=30240$ 通り

イ

L が続けて並ぶ場合の順列の数は，LL を 1 つの文字とみなすことにより，$\dfrac{8!}{3!}=6720$ 通り

よって，L が続けて並ばない並べ方の総数は $30240-6720=23520$ 通り

ウ

L, L, C, N, T, X の順列の間または両端の 7 ヶ所のうちの 3 ヶ所に E を入れればよいから，

$\dfrac{6!}{2!}\cdot{}_7C_3=360\cdot35=12600$ 通り

(2)

エ

E が 3 個：L, C, N, T, X から 1 つ選び，並べるから ${}_5C_1\cdot4=20$ 通り

E が 2 個，L が 2 個：$\dfrac{4!}{2!2!}=6$ 通り

2 個の E と E 以外の異なる 2 文字：L, C, N, T, X から 2 つ選び，並べるから ${}_5C_2\cdot\dfrac{4!}{2!}=120$ 通り

2 個の L と L 以外の異なる 2 文字：${}_5C_2\cdot\dfrac{4!}{2!}=120$ 通り

同じ文字が含まれない：E, L, C, N, T, X のうちの 4 つを順に並べるから，${}_6P_4=360$ 通り

よって，$20+6+120+120+360=626$ 通り

145

円順列の総数は，1 個しかない白玉を固定することにより，$\frac{12!}{2!4!6!}=13860$ 通り。

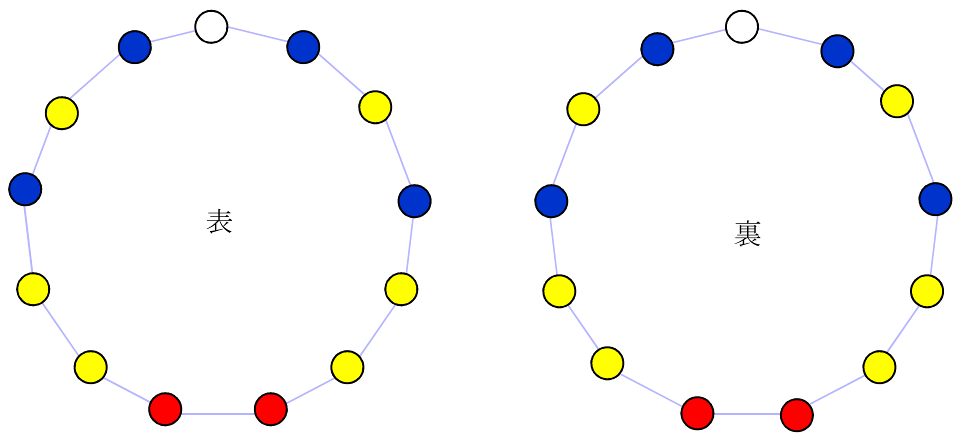
このうち，白玉から見て左右対称になる円順列の数は，赤玉 1 個，青玉 2 個，黄玉 3 個の順列で決まるから，$\frac{6!}{2!3!}=60$ 通り。

この円順列をもつネックレスは表裏とも同じ円順列だから，数珠順列の数も 60 通り。

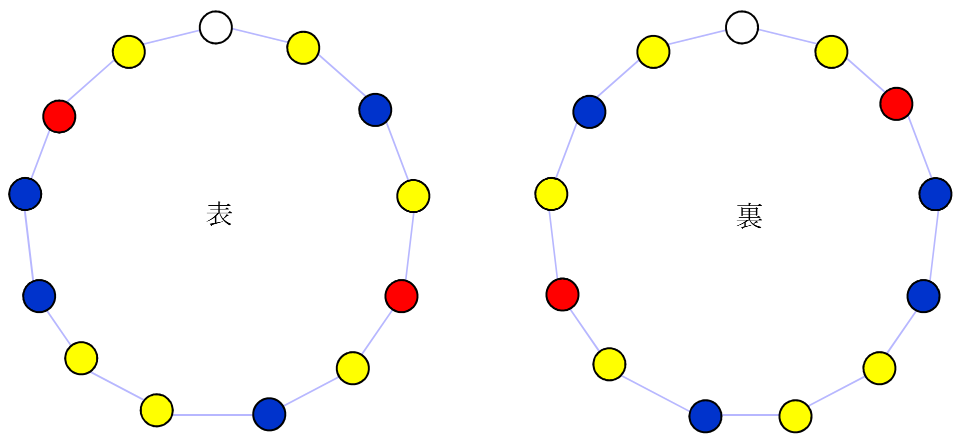
他の $13860-60=13800$ 通りの円順列はネックレスの表と裏の円順列が 1 対 1 に対応する関係にあるから，数珠順列の数は $\frac{13800}{2}=6900$ 通り。

よって，数珠順列の総数は $60+6900=6960$ 通り。

白玉から見て左右が対称



白玉から見て左右が非対称



146

(1)

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 \cdot {}_2\mathrm{C}_2}{3!} = 15$$

(2)

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n!} \cdot {}_{14}\mathrm{C}_2 \cdot \cdots \cdot {}_{16-2n}\mathrm{C}_2 \\ &= \frac{1}{n!} \cdot \frac{14!}{2!12!} \cdot \frac{12!}{2!10!} \cdot \cdots \cdot \frac{(16-2n)!}{2!(14-2n)!} \\ &= \frac{1}{n!} \cdot \frac{14!}{(14-2n)!2^n} \\ &= \frac{14!}{(14-2n)!n!2^n} \end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n!} \cdot {}_{14}\mathrm{C}_2 \cdot \cdots \cdot {}_{16-2n}\mathrm{C}_2 \\ &= \frac{1}{n!} \cdot \frac{{}_{14}\mathrm{P}_2}{2!} \cdot \frac{{}_{12}\mathrm{P}_2}{2!} \cdot \cdots \cdot \frac{{}_{16-2n}\mathrm{P}_2}{2!} \\ &= \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot {}_{14}\mathrm{P}_2 \cdot {}_{12}\mathrm{P}_2 \cdot \cdots \cdot {}_{16-2n}\mathrm{P}_2 \\ &= \frac{1}{n!2^n} \cdot \frac{14!}{12!} \cdot \frac{12!}{10!} \cdot \cdots \cdot \frac{(16-2n)!}{(14-2n)!} \\ &= \frac{1}{n!2^n} \cdot \frac{14!}{(14-2n)!} \\ &= \frac{14!}{(14-2n)!n!2^n} \end{aligned}$$

または，

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n!} \cdot {}_{14}\mathrm{C}_2 \cdot \cdots \cdot {}_{16-2n}\mathrm{C}_2 \\ &= \frac{1}{n!} \cdot \frac{{}_{14}\mathrm{P}_2}{2!} \cdot \frac{{}_{12}\mathrm{P}_2}{2!} \cdot \cdots \cdot \frac{{}_{16-2n}\mathrm{P}_2}{2!} \\ &= \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot {}_{14}\mathrm{P}_2 \cdot {}_{12}\mathrm{P}_2 \cdot \cdots \cdot {}_{16-2n}\mathrm{P}_2 \\ &= \frac{1}{n!2^n} \cdot {}_{14}\mathrm{P}_{2n} \\ &= \frac{1}{n!2^n} \cdot \frac{14!}{(14-2n)!} \\ &= \frac{14!}{(14-2n)!n!2^n} \end{aligned}$$

補足

$${}_n\mathrm{C}_r=\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}=\frac{1}{r!}\cdot\frac{n!}{(n-r)!}$$

$${}_{14}\mathrm{P}_2\cdot{}_{12}\mathrm{P}_2\cdot\cdots\cdot{}_{16-2n}\mathrm{P}_2={}_{14}\mathrm{P}_{2n}=\frac{14!}{(14-2n)!}$$

(3)

$$\begin{aligned}\frac{S_{n+1}}{S_n}&=\frac{14!}{\{14-2(n+1)\}!(n+1)!2^{n+1}}\cdot\frac{(14-2n)!n!2^n}{14!}\\&=\frac{(14-2n)(13-2n)}{2(n+1)}\\&=\frac{(7-n)(13-2n)}{n+1}\end{aligned}$$

より，$\dfrac{(7-n)(13-2n)}{n+1}>1$

両辺に $n+1$ を掛けると，$(7-n)(13-2n)>n+1$ $(\because n+1>0)$

この両辺を整理すると，$2(n^2-14n+45)>0$　すなわち $2(n-5)(n-9)>0$

n は 1 以上 7 以下の整数だから，この不等式を満たす n の値は1, 2, 3, 4

(4)

$n=1, 2, 3, 4$ のとき，$2(n-5)(n-9)>0$ より，$S_n<S_{n+1}$

$n=5$ のとき，$2(n-5)(n-9)=0$ より，$S_n=S_{n+1}$

$n=6$ のとき，$2(n-5)(n-9)<0$ より，$S_n>S_{n+1}$

よって，$S_1<S_2<S_3<S_4<S_5=S_6>S_7$

ゆえに，S_n を最大にする n の値は 5 と 6

147

(1)

ある 1 つの頂点を共有する対角線の本数は $n-3$ だから，

その頂点を共有する 2 本の対角線の組は ${}_{n-3}\mathrm{C}_2$ 通りある。

よって，全部で $n\cdot{}_{n-3}\mathrm{C}_2=\dfrac{n(n-3)(n-4)}{2}$ 通り

(2)

4 つの頂点をとると，2 本の対角線の組をつくることができ，

そのうち，条件を満たす組はただ 1 つだけである。

よって，${}_n\mathrm{C}_4=\dfrac{{}_n\mathrm{P}_4}{4!}=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$

補足

四角形は 2 組の対角線をもち，その共有点は頂点以外の点である。

(3)

対角線とは 2 つの頂点を結ぶ線分の集合から隣り合う頂点を結ぶ線分すなわち辺を除いたものだから，その本数は ${}_n\mathrm{C}_2-n=\dfrac{n(n-3)}{2}$

よって，2 本の対角線の組は ${}_{\frac{n(n-3)}{2}}\mathrm{C}_2=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n(n-3)}{2}\left\{\dfrac{n(n-3)}{2}-1\right\}=\dfrac{n(n-3)(n^2-3n-2)}{8}$

2 本の対角線の組は共有点をもたない組，頂点を共有する組，頂点以外の点を共有する組に排反に分類されるから，共有点をもたないものは

$\dfrac{n(n-3)(n^2-3n-2)}{8}-\dfrac{n(n-3)(n-4)}{2}-\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}=\dfrac{n(n-3)(n-4)(n-5)}{12}$ 通り

148

(1)

整数が入る○を 5 つ，整数の仕切り｜を 3 つ用意し，並べる。
このとき｜の両側に入る数字について，
左端の｜の左側を 1，右側を 2
真ん中の｜の左側を 2，右側を 3
右端の｜の左側を 3，右側を
と約束する。
たとえば，
○｜｜｜○○○○ならば整数の組は $(1,4,4,4,4)$
｜○○｜○○｜○ならば整数の組は $(2,2,3,3,4)$ となる。
そうすることにより，○5 つと｜3 つの順列と整数の組が 1 対 1 に対応する。
よって，求める整数の組合せは，
○5 つと｜3 つの順列より，$\dfrac{8!}{5!\cdot 3!}=56$ 通り
あるいは，8 個の箱に｜を 3 つ入れる選び方より，${}_8\mathrm{C}_3=56$ 通り
次に，各組の整数を a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 に配分するのだが，
$a_1\leq a_2\leq a_3\leq a_4\leq a_5$ より，その配分の仕方は 1 通りしかない。
たとえば，
整数の組が $(1,4,4,4,4)$ ならば $a_1=1$，$a_2=a_3=a_4=a_5=4$
整数の組が $(2,2,3,3,4)$ ならば $a_1=a_2=2$，$a_3=a_4=3$，$a_5=4$
よって，求める個数は，$56\times 1=56$ 個　・・・(答)

別解

何種の整数の組にするかで排反に分類する。

同じ整数のみからなる組の個数

整数の選び方：4 通り

どの整数を何個にするかの配分の仕方：1 通り

よって，4×1＝4 個

異なる 2 つの整数からなる組の個数

整数の選び方＝${}_4C_2$＝6 通り

どの整数を何個にするかの配分の仕方：(4,1)，(3,2)，(2,3)，(1,4)の 4 通り

よって，6×4＝24 個

異なる 3 つの整数からなる組の個数

整数の選び方＝${}_4C_3$＝4 通り

どの整数を何個にするかの配分の仕方：(3,1,1)，(1,3,1)，(1,1,3)，(2,2,1)，(2,1,2)，(1,2,2)
の 6 通り

よって，4×6＝24 個

異なる 4 つの整数からなる組の個数

整数の選び方：1 通り

どの整数を何個にするかの配分の仕方：(2,1,1,1)、(1,2,1,1)、(1,1,2,1)、(1,1,1,2)
の 4 通り

よって，1×4＝4 個

以上より，整数の組は全部で 56 個ある。

次に，各組の整数を a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 に配分するのだが，

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$ より，その配分の仕方は 1 通りしかない。

たとえば，

整数の組が $(1,4,4,4,4)$ ならば $a_1 = 1$， $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 4$

整数の組が $(2,2,3,3,4)$ ならば $a_1 = a_2 = 2$， $a_3 = a_4 = 3$， $a_5 = 4$

よって，求める個数は，$56 \times 1 = 56$ 個　・・・(答)

(2)

$b_1 = a_1$

$b_2 = a_1 + a_2$

$b_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$b_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$b_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

とすると，

$b_1 = a_1 \geq 1$ より，b_1 は(1)の条件(A)を満たす。

$b_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq 4$ より，b_5 は(1)の条件(B)を満たす。

$b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq b_4 \leq b_5$ より，$b_i \leq b_{i+1}$ であり，これは(1)の条件(C)を満たす。

よって，整数$(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$の組の個数は(1)と同じ 56 個である。

また、任意の$(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$の組に対し，

$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (b_1, b_2 - b_1, b_3 - b_2, b_4 - b_3, b_5 - b_4)$ より，

整数の組$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$が 1 対 1 に対応する。

よって，整数の組$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$の個数も 56 個　・・・(答)

別解

$a_1' = a_1 - 1$ とおくと $a_1' \geq 0$

また，$(a_1'+1) + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq 4$ より，

$a_1' + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq 3$

ここで，$a_1' + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + d = 3$ となるように 0 以上の整数 d を加えると，

これを満たす 6 個の整数の組は，$(3,0,0,0,0,0)$，$(2,1,0,0,0,0)$，$(1,1,1,0,0,0)$

これを $a_1', a_2, a_3, a_4, a_5, d$ に分ける方法は，

整数の組が$(3,0,0,0,0,0)$の場合

　a_1' ～ d のどれか 1 つが 3 となる場合の数より，6 通り

整数の組が$(2,1,0,0,0,0)$の場合

　a_1' ～ d のどれか 1 つが 2，どれか 1 つが 1 となる場合の数より，$6 \times 5 = 30$ 通り

整数の組が$(1,1,1,0,0,0)$の場合

　a_1' ～ d のどれか 3 つが 1 となる場合の数より，${}_6\mathrm{C}_3 = 20$ 通り

よって、全部で 56 通り

これより，

整数の組$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$の個数も 56 個

(3)

1 桁目の数から順に $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_i, \cdots a_n$ とおくと，

$a_1 \geq 1$，$a_i \geq 0 (i = 2,3,\cdots, n)$，$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq r$

ここで，$b_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_i$ とすると，

$b_1 = a_1 \geq 1$，$b_i \leq b_{i+1}$，$b_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq r$ より，

整数の組 $(b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n)$ に与えられた条件は，(1)の条件と同様である。

よって，(1)の解法と同様にしてその整数の組を求めることができる。

つまり，n 個の○と $r-1$ 個の仕切り｜の順列の個数×1 の値が

整数の組 $(b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n)$ の個数となる。

よって，$\dfrac{\{n+(r-1)\}!}{n!\cdot(r-1)!} = \dfrac{(n+r-1)!}{n!\cdot(r-1)!}$ 個

また，$(a_1 a_2, a, \cdots, a_i, \cdots, a_n) = (b_1, b_2 - b_1, b_3 - b_2, \cdots, b_i - b_{i-1}, \cdots, b_n - b_{n-1})$ より，

整数の組 $(b_1, b_2, b_3, \cdots, b_i, \cdots b_n)$ と各桁の整数の組 $(a_1 a_2, a, \cdots, a_i, \cdots, a_n)$ とが

1 対 1 に対応する。

よって，各桁の数字の組は全部で $\dfrac{(n+r-1)!}{n!\cdot(r-1)!}$ 個　・・・(答)